קורס תורת הקבוצות – סתיו תשס"ה

פרק ז': המספרים הסודרים (גרסה 2, 28.12.2004)

משפט 122 אומר לנו שאנו יכולים תמיד להשוות שתי קבוצות סדורות היטב. כאשר אנו באים להשוות שתי קבוצות סופיות מצבנו נוח במיוחד כי איננו צריכים להשוות אותן זו לזו אלא אנו עושים זאת באמצעות השוואת הקבוצות עם המספרים הטבעיים. כך מותאם לכל קבוצה סדורה סופית מספר, וכדי להשוות שתי קבוצות סופיות אנו רק צריכים להשוות את המספרים שלהן. אנו נעשה עתה את אותו הדבר גם לקבוצות סדורות היטב אינסופיות, כלומר נגדיר מושג של מספר גם לקבוצות כאלו ואז נדע כי הקבוצה A איזומורפית לרישא של B אמם המספר של A קטן או שווה לזה של B.

כאשר אנו באים להגדיר מספרים לקבוצות סדורות היטב כלשהן נראה תחילה כיצד הדבר נעשה לקבוצות סופיות ונלמד מכך מה לעשות לכלל הקבוצות. עד עתה קבלנו בקורס זה את המספרים הטבעיים כעצמים שבאו לתורת הקבוצות מבחוץ. כעת נראה שאנו יכולים גם להגדיר אותם כקבוצות מסויימות. צרמלו הגדיר את המספרים הטבעיים כ- $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$, כלומר הם מתחילים במספר 0 שהוא הקבוצה הריקה $\emptyset$, ולכל מספר n העוקב שלו הוא קבוצת היחידה $\{n\}$. פון נוימן הגדיר את המספרים הטבעיים כ- $\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\ \ldots$, כלומר, כל מספר טבעי n הוא הקבוצה $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ של כל המספרים הטבעיים הקטנים ממנו. את המספרים של צרמלו איננו יכולים להמשיך מעבר למספרים הטבעיים, אבל את המספרים של פון נוימן אנו יכולים, ולמשל, המספר הראשון מעבר למספרים הטבעיים יהיה קבוצת כל המספרים הטבעיים, שנסמן אותה, למטרה הנוכחית, ב-ω. הסודר העוקב ל-ω, שנסמנו ב-ω' הוא $\{0,1,2,\ldots,\omega\}$, והעוקב לו הוא $\{0,1,2,\ldots,\omega,\omega'\}$

אנו נצא, אם כן, מן ההגדרה של פון נוימן ולמספרים שנקבל נקרא מספרים סודרים, ובקיצור סודרים. נראה כעת מהן התכונות של המספרים של פון נוימן ונלמד מהן כיצד להגדיר את מושג המספר הסודר. האיברים של מספר n הם המספרים m הקטנים ממנו, והאיברים של מספר m כזה הם מספרים הקטנים מ-m, ולכן גם קטנים מ-n והם איברים של n. כך ראינו כי איבר של איבר של n הוא איבר של n, וזאת היא התכונה הראשונה בה אנו מעוניינים.

מכיוון שמספר קטן יותר הוא איבר של מספר גדול יותר הרי היחס המייצג את סדר המספרים לפי גודלם הוא יחס האיברות $\in$. את המספרים אנו בונים זה אחר זה כמו בדוגמאות שראינו לעיל ולכן אנו רוצים שהסדר שלהם יהיה סדר טוב. לכן התכונה השניה היא שמספר הוא בעצמו קבוצה סדורה היטב כאשר יחס הסדר הוא יחס האיברות $\in$.

על התכונות הללו תתבסס ההגדרה של מושג הסודר ב-128. לפני כן נעסוק בתכונה הראשונה שהזכרנו כאן והיא שכל איבר של איבר של קבוצה הוא איבר של הקבוצה.

126. **הגדרה**. מחלקה A נקראת **טרנזיטיבית** אם כל איבר של איבר של A הוא איבר של A. (זה שקול לכך ש- $\bigcup A \subseteq A$, וגם לכך שלכל $x \in A$ $x \subseteq A$.)

אין לבלבל בין מושג הטרנזיטיביות של מחלקה, שהוגדר כאן, לבין מושג הטרנזיטיביות של יחס, ויש להבחין ביניהם לפי ההקשר.

127. **למה**. אם כל איברי A הם קבוצות טרנזיטיביות אז:
א. גם אחודם $\bigcup A$ הוא טרנזיטיבי.
ב. אם $A \neq \emptyset$ אז גם חיתוכם $\bigcap A$ הוא טרנזיטיבי.

128. **הגדרה**. בהתבסס על הדיון דלעיל נגדיר כי קבוצה x תיקרא **מספר סודר** או, בקיצור, **סודר** אם:
א. x קבוצה טרנזיטיבית.
ב. x סדורה היטב ע"י יחס ה-$\in$.

האותיות היווניות $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ יסמנו סודרים.

129. **משפט**. $\emptyset$ הוא סודר.

130. **משפט**. לכל סודר α קיים $\alpha\notin\alpha$.
הוכחה. לפי הגדרת מושג הסודר, $\in$ מסדר את α ובפרט קיימת אירפלקסיביות, כלומר לכל $x\in\alpha$ $x\notin x$. אילו היה $\alpha\in\alpha$ היה כלל זה נכון גם במקרה בו $x=\alpha$ והיה קיים $\alpha\notin\alpha$, בסתירה להנחה ש- $\alpha\in\alpha$.

131. **משפט**. אם α הוא סודר אז גם $\alpha\cup\{\alpha\}$ הוא סודר.
הוכחה. $\alpha\cup\{\alpha\}$ טרנזיטיבית: אם $x\in y\in\alpha\cup\{\alpha\}$ אז או ש- $x\in y\in\alpha$ ואז $x\in\alpha\subseteq\alpha\cup\{\alpha\}$, כי α טרנזיטיבית, או ש-$x\in y\in\{\alpha\}$, ואז $y=\alpha$ ו- $x\in\alpha\subseteq\alpha\cup\{\alpha\}$.
$\alpha\cup\{\alpha\}$ סדורה היטב ע"י $\in$: אירפלקסיביות: יהי $x\in\alpha\cup\{\alpha\}$. אם $x\in\alpha$ אז $x\notin x$ לפי הגדרת מושג הסודר, אם $x=\alpha$ אז $x\notin x$ לפי 130.
טרנזיטיביות (הכוונה כאן היא לטרנזיטיביות הסדר בתוך $\alpha\cup\{\alpha\}$): יהיו $x,y,z\in\alpha\cup\{\alpha\}$, $x\in y\in z$. אם $z\in\alpha$ אז לאור טרנזיטיביות α גם $y\in\alpha$ ולכן גם $x\in\alpha$. כעת $x,y,z\in\alpha$ ו- $x\in y\in z$ לכן, לאור טרנזיטיביות $\in$ על α, $x\in z$. אם $z=\alpha$ אז לאור טרנזיטיביות α, קיים $x\in\alpha=z$.
השוואה: יהיו $x,y\in\alpha\cup\{\alpha\}$, $x\neq y$. אם אחד מהם, נאמר y, הוא α אז $x\in\alpha=y$. אם שניהם ב-α אז מכיוון ש-α סודר קיים $x\in y$ או $y\in x$.
סדר טוב: תהי $\emptyset\neq A\subseteq\alpha\cup\{\alpha\}$. אם $A\cap\alpha\neq\emptyset$ אז מכיוון ש-$\in$ מסדר היטב את α קיים y מזערי ב- $A\cap\alpha$. נראה כי y מזערי ב-A. יהי $x\in A$. אם $x\in\alpha$ אז, לפי הגדרת y, $x=y$ או $y\in x$, ואם $x=\alpha$ אז $y\in\alpha=x$, וכך y הוא המזערי ב-A. אם $A\cap\alpha=\emptyset$ אז $A=\{\alpha\}$ ו-α הוא האיבר המזערי של A.

132. **משפט**. כל איבר של סודר הוא סודר.
הוכחה. יהי $z\in\alpha$. נוכיח ש-z טרנזיטיבית. יהיו $x\in y\in z$. מכיוון ש-α טרנזיטיבית ו- $z\in\alpha$ גם $y\in\alpha$ ולכן גם $x\in\alpha$. כעת ש- $x,y,z\in\alpha$ אז, לאור טרנזיטיביות $\in$ על α קיים $x\in z$. כעת נראה כי $\in$ מסדר היטב את z. מכיוון ש-α טרנזיטיבית $z\subseteq\alpha$. $\in$ מסדר היטב את α, ולכן, לפי 116, הוא גם מסדר היטב את z.

133. **משפט**. א. אם $b\subseteq\alpha$ טרנזיטיבית אז $b=\alpha$ או $b\in\alpha$. לכן אם $\beta\subseteq\alpha$ אז $\beta=\alpha$ או $\beta\in\alpha$.
ב. b הוא רישא של α אםם b הוא סודר $\le\alpha$, ו- b הוא רישא ממש של α אםם b הוא סודר $<\alpha$.
הוכחה. א. אם $b\subsetneq\alpha$ יהי y האיבר המזערי של $\alpha\setminus b$. אז, לאור מזעריות y קיים לכל $x\in y$ $x\notin\alpha\setminus b$, ולכן $x\in b$, כלומר $y\subseteq b$. נראה עתה כי $b\subseteq y$ ולכן $b=y\in\alpha$. יהי $x\in b$. אם $x\notin y$ אז משום ש- $x,y\in\alpha$ והיחס $\in$ מסדר את α לכן $x=y$ או $y\in x$, ובכל מקרה, מכיוון ש-b טרנזיטיבית ו- $x\in b$, קיים $y\in b$, בסתירה לבחירת y.
ב. אם b היא רישא של A אז b היא טרנזיטיבית כי אם $x\in y\in b$ אז $x<y\in b$, ומכיוון ש-b היא רישא גם $x\in b$. לכן לפי א' b היא סודר $\le\alpha$.
אם b סודר $<\alpha$ אז מכיוון ש-α טרנזיטיבית $b\subseteq\alpha$ וגם $b\subsetneq\alpha$. מכיוון ש-b היא סודר היא רישא של α כי אם $\gamma<\delta\in b$ אז $\gamma<\delta<b$ ולכן $\gamma<b$ כלומר $\gamma\in b$.

134. **משפט**. לכל α,β $\alpha=\beta$ או $\alpha\in\beta$ או $\beta\in\alpha$.
הוכחה. יהי $\alpha\cap\beta=y$. לפי 127ב' y היא קבוצה טרנזיטיבית. לפי 133א', $\alpha=y$ או $y\in\alpha$, וכן $\beta=y$ או $y\in\beta$. אם קיים לפחות אחד השיוויונות, אז קיימת תוצאת המשפט. אחרת, קיים $y\in\alpha$ וגם $y\in\beta$ ולכן $y\in\alpha\cap\beta=y$. מצב זה לא יתכן כי אף איבר של α אינו איבר של עצמו.

135. **משפט**. אם A מחלקה לא ריקה של סודרים אז $\bigcap A$ הוא האיבר המזערי של A ביחס ל-$\in$.
הוכחה. לפי 127ב' ו-133א' $\bigcap A$ הוא סודר שנסמנו ב-α. ברור כי $\alpha\subseteq\beta$ לכל $\beta\in A$, ולפי 133א', לכל

$\beta \in A$ קיים $\beta = \alpha$ או $\alpha \in \beta$, ולכן α חסם מלרע ל-A. אם עבור $\beta \in A$ כלשהו $\beta = \alpha$ אז α הוא האיבר המזערי של A. אחרת, קיים לכל $\beta \in A$ $\alpha \in \beta$, ולכן $\alpha \in \bigcap A = \alpha$, בסתירה ל-130.

136. **משפט**. מחלקת כל הסודרים On סדורה היטב ע"י $\in$.
הוכחה. לפי 130, טרנזיטיביות הסודרים, 134 ו-135.

137. **הסדר של הסודרים**. נסמן את הסדר $\in$ בין הסודרים גם ב-$<$, ואז גם $\alpha \leq \beta$ משמעותו ש- $\beta = \alpha$ או $\alpha \in \beta$, כלומר $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$. בסדר זה $\alpha \cup \{\alpha\}$ הוא העוקב של α, במובן ש-$\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$ ולא קיים β כך ש- $\alpha < \beta < \alpha \cup \{\alpha\}$. לאור 133א' קיים $\alpha \leq \beta$ אםם $\alpha \subseteq \beta$, ו- $\alpha < \beta$ אםם $\alpha \subsetneq \beta$.

138. **מסקנה**. מחלקת כל הסודרים On אינה קבוצה.
הוכחה. אילו היתה On קבוצה אז לפי 132 ו-136 היתה On סודר ולכן היה קיים $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$, בניגוד ל-130.

139. **מסקנות**. א. כל קבוצה טרנזיטיבית של סודרים היא סודר.
ב. לכל קבוצת סודרים A $\bigcup A$ היא סודר שהוא החסם העליון של A, כלומר $\bigcup A$ היא הסודר המזערי שהוא גדול או שווה מכל אחד מן הסודרים ב-A.
הוכחה. א. נובע מ-136 ו-116.
ב. לפי 127א', 132 ו-א' $\bigcup A$ הוא סודר. לפי 133א' $\bigcup A$ גדול או שווה מכל סודר ב-A. מצד שני, אם $\alpha \leq \beta$ לכל $\alpha \in A$ אז מכיוון ש-β קבוצה טרנזיטיבית קיים $\alpha \subseteq \beta$ לכל $\alpha \in A$ ולכן $\bigcup A \subseteq \beta$, ולפי 133א' $\bigcup A \leq \beta$.

140. **הגדרה**. א. הסודר $\alpha \cup \{\alpha\}$ נקרא **הסודר העוקב ל-**α ונסמנו גם ב- $s(\alpha)$.
ב. α נקרא **סודר עוקב** אם $\alpha = s(\beta)$ עבור סודר β כלשהו.
ג. את הסודר $\emptyset$ נסמן גם ב-0.
ד. סודר שאינו 0 ואינו עוקב נקרא **סודר גבולי**.

141. **למה**. א. $\alpha < s(\alpha)$, ואין שום סודר בין α ו-$s(\alpha)$.
ב. סודר α הוא גבולי אםם $\alpha \neq 0$ ולכל $\beta < \alpha$ קיים γ כך ש- $\beta < \gamma < \alpha$.
הוכחה. ב. אם α גבולי ו- $\beta < \alpha$ אז לא קיים $\beta \cup \{\beta\} < \alpha$, כי זה גורר $\alpha < \beta$ או $\alpha = \beta$, וגם לא קיים $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, כי α אינו עוקב, ולכן $\beta \cup \{\beta\} < \alpha$. כך עבור $\gamma = \beta \cup \{\beta\}$ קיים $\beta < \gamma < \alpha$.
מצד שני, אם $\alpha \neq 0$ ולכל $\beta < \alpha$ קיים γ כך ש- $\beta < \gamma < \alpha$ אז α אינו עוקב, כי אם $\alpha = s(\delta)$ אז $\delta < \alpha$ ולפי הנחתנו קיים γ כך ש- $\delta < \gamma < \alpha = s(\gamma)$, בניגוד ל-א'.

142. **הגדרה**. α נקרא **סודר סופי** אם α הוא סודר שהוא 0 או עוקב וכל סודר הקטן ממנו הוא 0 או עוקב. נגדיר את המספרים הטבעיים כסודרים הסופיים. לפי אקסיומת האינסוף מחלקת המספרים הטבעיים N היא קבוצה, ולכן לפי 143א' ו-139א' N היא סודר, שנסמנו גם ב-ω.

143. **למה**. א. אם α סודר סופי אז כל סודר $\beta < \alpha$ גם הוא סופי.
ב. אם α הוא סודר סופי אז גם $s(\alpha)$ הוא סודר סופי.

144. **משפט**. המספרים הטבעיים, כלומר הסודרים הסופיים, ממלאים אחר אקסיומות פיאנו הבאות:
א. $s(n) \neq 0$.
ב. אם $s(n) = s(m)$ אז $n = m$.
ג. אקסיומת האינדוקציה. אם $0 \in A$, ולכל סודר סופי n אם $n \in A$ אז גם $s(n) \in A$ אז A מכילה את כל הסודרים הסופיים.
הוכחה. ג. אם A אינה מכילה את כל הסודרים הסופיים, יהי α הסודר הסופי המזערי שאינו ב-A. $\alpha \neq 0$ כי $0 \in A$. לכן α הוא עוקב של סודר β, שהוא סופי לפי 143א'. לפי מזעריות α קיים $\beta \in A$, ולכן, לפי

הנחתנו על A, גם $\alpha = s(\beta) \in A$, בסתירה לבחירת α.

כעת אנו מגיעים למשפט האומר שהמספרים הסודרים הם המספרים של הקבוצות הסדורות היטב.

145. **משפט**. לכל קבוצה סדורה היטב A קיים סודר יחיד α כך ש- A דומה ל- α. סודר זה נקרא **טיפוס הסדר** של A, וגם **הסודר** של A.

הוכחה. נגדיר פונקציה F ברקורסיה על A ע"י

$$F(x) = \{F(y) \mid y < x\} \qquad (*)$$

ראשית נוכיח, באינדוקציה על x, כי $F(x)$ הוא סודר. לפי הנחת האינדוקציה, לכל $y < x$ $F(y)$ הוא סודר, ולכן אגף ימין של $(*)$ הוא קבוצה של סודרים. נראה שזאת קבוצה טרנזיטיבית ולכן, לפי 139א', אגף ימין של $(*)$ הוא סודר. יהי u איבר של איבר $F(y)$ של אגף ימין של $(*)$. לפי הגדרת $F(y)$ $u = F(z)$ עבור $z < y$ כלשהו. מכיוון ש- $z < y < x$ קיים $z < x$ ולכן $u = F(z)$ הוא באגף ימין של $(*)$.

כך ראינו ש- $\mathrm{Range}(F)$ היא קבוצה של סודרים. נראה כי $\mathrm{Range}(F)$ היא טרנזיטיבית ולכן, לפי 139א', היא סודר α. יהי u איבר של איבר של $\mathrm{Range}(F)$, כלומר $u \in F(x)$ עבור $x \in A$ כלשהו. אז, לפי הגדרת $F(x)$ $u = F(y)$ עבור $y \in x$ כלשהו, ולכן גם $u \in \mathrm{Range}(F)$.

F היא העתקת דימיון, כי לפי הגדרת F אם $y < x$ אז $F(y) \in F(x)$.

נראה עתה כי הסודר α הוא יחיד. נניח שקיימים שני סודרים $\beta < \alpha$ והעתקות דימיון F מ-A על α ו-G מ-A על β, אז FG^{-1} היא העתקת דימיון מ-β על α. מכיוון ש- $\alpha \in \beta$ α הוא בתחום FG^{-1} וערכו $FG^{-1}(\alpha)$ הוא בטווח FG^{-1} שהוא α, כלומר $FG^{-1}(\alpha) < \alpha$, בניגוד למשפט 119 האומר שלכל פונקציה F שומרת סדר קיים $F(\alpha) \geq \alpha$.

146. **למה**. תהי F העתקת דימיון של קבוצה סדורה A על קבוצה סדורה B אז לכל רישא ממש A' של A $F([A'])$ היא רישא ממש של B.

הוכחה. תחילה נראה ש- $F[A']$ היא רישא של B. יהי $u < v \in F[A']$. מכיוון ש- $v \in F[A']$ קיים $x \in A'$ כך ש- $v = F(x)$. מכיוון ש-F היא על B קיים $y \in A$ כך ש- $u = F(y)$. אם $y \geq x$ אז $v = F(x) \leq F(y) = u$, בניגוד להנחתנו, ולכן $y < x$. מכיוון ש-A' רישא גם $y \in A'$ ו- $u = F(y) \in F[A']$, ו-$F[A']$ היא רישא של B.

כעת נראה ש-$F[A']$ היא רישא ממש של B. מכיוון ש-A' היא רישא ממש של A קיים $x \in A \setminus A'$. נראה כי $F(x) \notin F[A']$. אילו היה $F(x) \in F[A']$ היה קיים $y \in A'$ כך ש- $F(y) = F(x)$, ומכיוון ש-F חד חד ערכית קיים $x = y \in A'$, בניגוד לבחירת x כאיבר של $A \setminus A'$.

147. **משפט**. אם α טיפוס הסדר של קבוצה סדורה היטב A, אז לכל סודר β, $\beta < \alpha$ אםם β הוא טיפוס הסדר של רישא ממש של A.

הוכחה. לפי הנתון קיימת העתקת דימיון F של α על A. אם $\beta < \alpha$ אז β היא רישא ממש של α, ולפי למה 146 $F[\beta]$ היא רישא ממש של A. $F \restriction \beta$ היא העתקת דימיון של β על $F[\beta]$ ולכן β היא טיפוס הסדר של $F[\beta]$.

מצד שני, אם B היא רישא ממש של A אז לפי משפט 146 $F^{-1}[B]$ היא רישא ממש של α ולכן, לפי משפט 133ב' $F^{-1}[B]$ היא סודר $\gamma < \alpha$. מכיוון ש-$F^{-1} \restriction B$ היא העתקת דימיון של B על γ, γ הוא טיפוס הסדר של B. לכן אם β הוא טיפוס הסדר של B אז $\beta = \gamma < \alpha$.

כעת נוכיח את המשפט שהסודר של קבוצה סדורה היטב הוא ה"אורך" של הקבוצה, וכאשר אנו יוצרים העתקת דימיון בין שתי קבוצות סדורות היטב אז נגמרת קודם הקבוצה שהסודר שלה קטן יותר.

148. **משפט**. תהיינה A, B קבוצות סדורות היטב שטיפוסי הסדר שלהן הם, בהתאמה α, β. אז קיימת העתקת דמיון של A על רישא של B אםם $\beta \leq \alpha$.

הוכחה. תהיינה F העתקת דמיון של α על A ו-G העתקת דימיון של β על B.
אם $\beta \le \alpha$ אז $\mathrm{Range}(F^{-1}) = \alpha \subseteq \beta = \mathrm{Dom}(G)$, ולכן $GF^{-1}[A] = G[F^{-1}[A]] = G[\alpha]$.
GF^{-1} היא, אם כן, העתקת דימיון של A על $G[\alpha]$ שהיא, לפי 146, רישא של B.
אם קיימת העתקת דימיון H של A על רישא D של B אז, מכיוון ש- $\mathrm{Range}(F) = A = \mathrm{Dom}(H)$, HF היא העתקת דימיון של α על D, וגם $G^{-1}HF$ היא העתקה שומרת סדר של α לתוך β.
$\mathrm{Range}(G^{-1}HF) = G^{-1}[\mathrm{Range}(HF)] = G^{-1}[D]$, ולכן α הוא הסודר של $G^{-1}[D]$. לפי 146 $G^{-1}[D]$ הוא רישא של β ולכן, לפי 133ב', $G^{-1}[D]$ הוא סודר $\delta \le \beta$. כך δ הוא הסודר של $G^{-1}[D]$, ומכיוון שגם α הוא הסודר של $G^{-1}[D]$ קיים, לפי 145, $\alpha = \delta \le \beta$.

149. **למה**. יהי R יחס כלשהו על A ותהי F העתקה חח"ע מ-A ל-B. בשם **היחס המושרה** על B ע"י R באמצעות F אנו קוראים ליחס $S = \{\langle F(x), F(y)\rangle \mid xRy\}$ על B. אם R הוא יחס סדר על A אז S הוא יחס סדר על B ו-F היא העתקת דימיון של A על B. אם R הוא יחס סדר טוב על A אז גם S הוא יחס סדר טוב על B.

150. **משפט Hartogs**. לכל קבוצה A קיים סודר α כך שלא קיים $\alpha \preceq A$.
הוכחה. תהי W קבוצת כל טיפוסי הסדר של הקבוצות החלקיות ל-A כשהן מסודרות בסדרים טובים כלשהם (לקבוצה $B \subseteq A$ יכולים להיות טיפוסי סדר רבים כאשר היא מסודרת בסדרים טובים שונים). יהי α העוקב של החסם העליון $\bigcup W$ של W אז α גדול מכל איברי W. נראה עתה כי $\alpha \not\preceq A$. אילו היתה $\alpha \preceq A$ היתה קיימת העתקה F חח"ע של α על קבוצה B חלקית ל-A. לפי 149 קיים יחס סדר טוב $<$ על B כך ש-F הוא העתקת דימיון של $\langle \alpha, < \rangle$ על $\langle B, < \rangle$. לכן α הוא טיפוס הסדר של $\langle B, < \rangle$, ו- $\alpha \in W$, בסתירה לכך ש-α גדול מכל איברי W.